



---

# Logic for Computer Science. Knowledge Representation and Reasoning.

Lecture Notes  
for  
Computer Science Students  
Faculty EAIIB-IEiT AGH



**Antoni Ligęza**

Other support material:

<http://home.agh.edu.pl/~ligeza>

<https://ai.ia.agh.edu.pl/pl:dydaktyka:logic:start>

## Logiki Deskrypcyjne

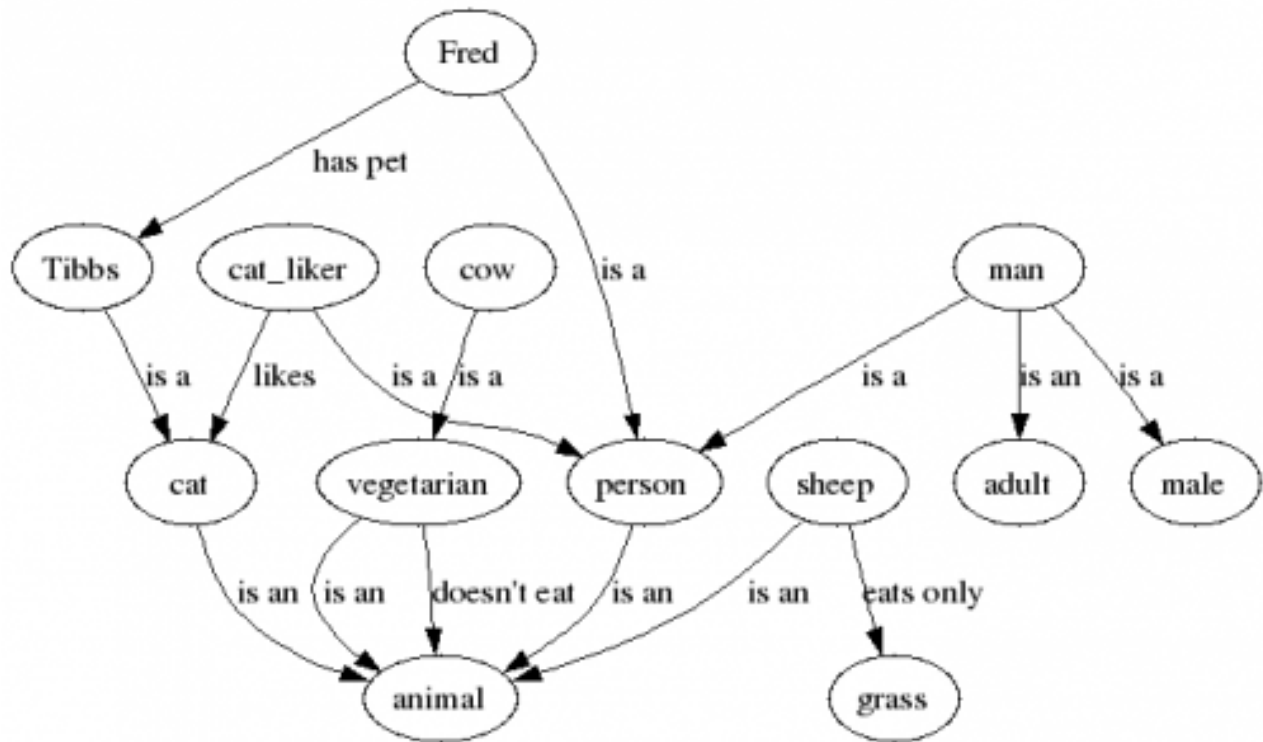


Figure 1: Example semantic net

---

## Logiki Deskrypcyjne

---

Logiki deskrypcyjne (opisowe) — formalny sposób zapisu wiedzy (taksonomie, relacje, ograniczona kwantyfikacja: **ontologie**; umożliwiają ograniczone **wnioskowanie**.

- Logiki deskrypcyjne (opisowe) (ang. **Description Logics**, DL) są **rodziną** formalizmów reprezentacji wiedzy.
- Elementami reprezentacji są **pojęcia** (klasy) i **instancje** (obiekty) oraz **role** (relacje) (Nazwy w nawiasach używane są zwykle w ontologiach zapisanych w języku OWL, opartym na formalizmie DL).
- Logiki opisowe są koncepcyjnie powiązane z **sieciami semantycznymi** (ang. **semantic networks**) i **ramami** (ang. **frames**), jednak w przeciwieństwie do nich, przez swoje powiązanie z logiką pierwszego rzędu, posiadają formalnie zdefiniowaną semantykę i zapewniają możliwość automatycznego wnioskowania.
- Intuicyjnie można powiedzieć, że logiki opisowe łączą paradygmat obiektowy (ramy, sieci semantyczne) z logiką (rachunek predykatów, logika 1. rzędu); stanowią też rozwinięcie koncepcji relacyjnych baz danych.

Wybrane fragmenty wiedzy zapisane w logice opisowej:

- $Fred : person, Tibbs : cat, (Fred, Tibbs) : has\_pet$
- $man \equiv person \sqcap adult \sqcap male, cat\_liker \equiv person \sqcap \exists likes.cat$
- $(cat\_liker, cat) : likes, (sheep, grass) : eats\_only$
- $cat \sqsubseteq animal, sheep \sqsubseteq animal \sqcap \forall eats.grass$

## Logiki Deskrypcyjne: Taksonomie i Relacje

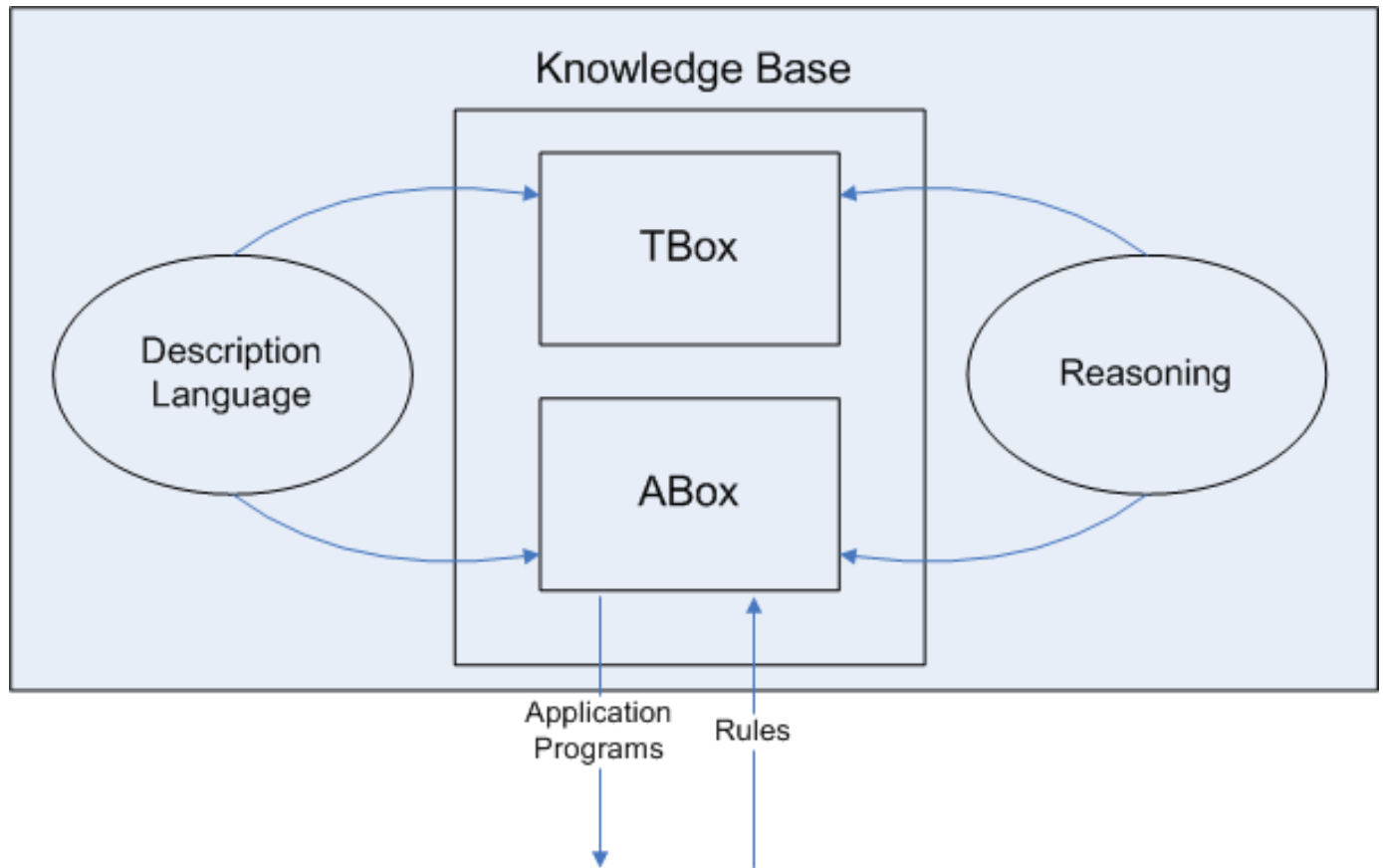


Figure 2: Komponenty bazy DL

## Zastosowanie logik opisowych

---

### Reprezentacja własności instancji (obiektu):

- przynależność obiektu do klasy (ang. **concept assertions**), np:
  - $Fred : person$  - Fred jest osobą
  - $Tibbs : cat$  - Tibbs jest kotem
- relacja między dwoma obiektami:
  - $(Fred, Tibbs) : has\_pet$  - Fred ma zwierzę, którym jest Tibbs

### Definicje i własności pojęć:

- definicje pojęć (warunki konieczne i wystarczające), np.
  - $man \equiv person \sqcap adult \sqcap male$  - Mężczyzna to dorosła osoba rodzaju męskiego,
  - $cat\_liker \equiv person \sqcap \exists likes.cat$  - Miłośnik kotów to osoba, która lubi (jakiegoś) kota,
- relacje między pojęciami (klasami)
  - $(cat\_liker, cat) : likes$  - (każdy) miłośnik kotów lubi (jakiegoś) kota
  - $(sheep, grass) : eats\_only$  - (każda) owca je tylko trawę
- aksjomaty
  - $cat \sqsubseteq animal$  (każdy) kot jest zwierzęciem (hierarchia pojęć)
  - $sheep \sqsubseteq animal \sqcap \forall eats.grass$  owce to zwierzęta, które jedzą tylko trawę (warunek konieczny, ale nie wystarczający).

---

## Bazowy język DL

---

### Podstawowy język DL

- W języku logiki opisowej tworzymy **opisy** — formalizujemy **ontologie**.
- Podstawowe elementy języka to: **atomiczne pojęcia** i **atomiczne role**.
- Złożone opisy tworzy się indukcyjnie za pomocą **konstruktorów**.
- Poszczególne języki DL różnią się między sobą **zbiorem dopuszczalnych konstruktorów**
- Najprostszy/bazowy język to  $\mathcal{AL}$  -  $\mathcal{ALC}$  (ang. **Attributive Language**)

### Składnia DL/AL

- atomiczne pojęcia ( $A, B, \dots$ )
- atomiczne role ( $R, S, \dots$ )
- opisy ( $C, D, \dots$ ); mogą nimi być:
  - $A$  - pojęcie atomiczne
  - $\top$  - //top concept//, pojęcie uniwersalne oznaczające 'wszystko'
  - $\perp$  - //bottom concept//, pojęcie puste, oznaczające 'nic'
  - $\neg A$  - negacja
  - $C \sqcap D$  - koniunkcja
  - $\forall R.C$  - kwantyfikator uniwersalny: "dla każdego"
  - $\exists R.C$  - kwantyfikator egzystencjalny/szczegółowy: "istnieje"

## Semantyka DL/AL

Semantyka DL/AL — Semantyka zdefiniowana jest poprzez //interpretację// składającą się z:

- dziedziny interpretacji:  $\Delta^{\mathcal{I}}$  - niepustego zbioru, na który mapowane są symbole i relacje,
- funkcji interpretacji, która przypisuje:
  - każdemu atomicznemu pojęciu zbiór:  $A \rightarrow A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
  - każdej atomicznej roli relację binarną:  $R^{\mathcal{I}} \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$

Konstruktor	Składnia	Semantyka
pojęcie atomiczne (atomic concept)	$A$	$A^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
atomiczna rola (atomic role)	$R$	$R^{\mathcal{I}} = R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$
pojęcie uniwersalne (universal concept)	$\top$	$\top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$
pojęcie puste (bottom concept)	$\perp$	$\perp^{\mathcal{I}} = \emptyset$
(**atomic** negation)	$\neg A$	$(\neg A)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}$
koniunkcja/przecięcie (intersection)	$C \sqcap D$	$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$
ograniczenie wartości (value restriction)	$\forall R.C$	$(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall b, (a, b) \in R^{\mathcal{I}} \text{ implies } b \in C^{\mathcal{I}}\}$
(ograniczony) kwantyfikator egzystencjalny limited existential quantification)	$\exists R.C$	$(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b, (a, b) \in R^{\mathcal{I}} \text{ and } b \in C^{\mathcal{I}}\}$
	$\exists R.\top$	$(\exists R.\top)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b, (a, b) \in R^{\mathcal{I}}\}$

---

## Przykłady formalizacji

---

### Przykład:

- pojęcia atomiczne: //Person//, //Female//, //Elephant// (uwaga: dopóki nie zapisze się tego explicite, pomiędzy pojęciami nie występują żadne relacje. Są to po prostu oznaczenia jakichś zbiorów)
  - osoba rodzaju żeńskiego:  $Person \sqcap Female$
  - słońca:  $Elephant \sqcap Female$
  - osoba, które nie jest rodzaju żeńskiego:  $Person \sqcap \neg Female$
- atomiczna rola: //hasChild//
  - osoba, która ma (jakieś) dziecko/dzieci:  $Person \sqcap \exists hasChild. \top$
  - osoba, której wszystkie dzieci są rodzaju żeńskiego  $Person \sqcap \forall hasChild. Female$
  - osoba bezdzietna  $Person \sqcap \forall hasChild. \perp$



## Rodzina języków DL

Poszczególne języki DL rozróżniamy poprzez konstruktory, które dopuszczają.

Przykładowe konstruktory:

- $\mathcal{U}$  - suma :  $(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$
- $\mathcal{E}$  - pełny kwantyfikator egzystencjalny :  $(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b, (a, b) \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\}$
- $\mathcal{N}$  - ograniczenia liczbowe:
  - $(\geq nR)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid |\{b \mid (a, b) \in R^{\mathcal{I}}\}| \geq n\}$
  - $(\leq nR)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid |\{b \mid (a, b) \in R^{\mathcal{I}}\}| \leq n\}$
- $\mathcal{C}$  - negacja :  $(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$

Używające powyższych konstruktorów języki nazywają się odpowiednio:

- $\mathcal{ALU}$
- $\mathcal{ALE}$
- $\mathcal{ALN}$
- $\mathcal{ALC}$  -> odpowiada podzbiorowi logiki pierwszego rzędu ograniczonemu do formuł z dwoma zmiennymi.

## Powiązanie z innymi rachunkami (logicznymi)

Większość logik opisowych jest **podzbiorem logiki pierwszego rzędu**:

- nazwy pojęć — predykaty unarne
- relacje (atomiczne) — predykaty binarne
- pojęcia — formuły z jedną wolną zmienną

Formuły logiki opisowej można intuicyjnie interpretować poprzez analogię do algebry zbiorów.

Przykład użycia	Składnia DL	Składnia FOL	Algebra zbiorów
Mężczyzna: <b>**dorosły i osoba i rodzaju męskiego**</b>	$C_1 \cap \dots \cap C_n$	$C_1(x) \wedge \dots \wedge C_n(x)$	$C_1 \cap \dots \cap C_n$
Gazeta to <b>**dziennik lub czasopismo**</b>	$C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$	$C_1(x) \vee \dots \vee C_n(x)$	$C_1 \cup \dots \cup C_n$
Wszystko, co jedzą wegetarianie to <b>**nie mięso**</b>	$\neg C$	$\neg C(x)$	$C^c$ (dopełnienie zbioru)
Kraje UE to: <b>**Niemcy, Francje, ..., Polska**</b>	$\{x_1\} \sqcup \dots \sqcup \{x_n\}$	$x = x_1 \vee \dots \vee x = x_n$	$\{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$
<b>**Każde zwierzę, które ma** starsza pani <b>**to kot**</b></b>	$\forall P.C$	$\forall y.P(x, y) \rightarrow C(y)$	$\pi_Y(P) \subseteq C$
Właściciel psa <b>**ma jakiegoś psa**</b>	$\exists P.C$	$\exists y.P(x, y) \wedge C(y)$	$\pi_Y(P) \cap C \neq \emptyset$ (sqcap - projekcja)
Rozsądny mężczyzna spotyka się z <b>**maksymalnie 1 kobietą równocześnie**</b> ;-)	$\leq nP$	$\exists \leq^n y.P(x, y)$	$\text{card}(P) \leq n$ (card - liczność zbioru)
Miłośnik zwierząt <b>**ma minimum 3 zwierzaki**</b>	$\geq nP$	$\exists \geq^n y.P(x, y)$	$\text{card}(P) \geq n$
Dziecko <b>**to to samo co**</b> młoda osoba	$C \equiv D$	$\forall x.C(x) \leftrightarrow D(x)$	$C \equiv D$
<b>**Każda foka jest zwierzęciem**</b>	$C \sqsubseteq D$	$\forall x.C(x) \rightarrow D(x)$	$C \subseteq D$

See: [https://en.wikipedia.org/wiki/Description\\_logic](https://en.wikipedia.org/wiki/Description_logic)